С.Н. Зиненко

Векторный и тензорный анализ

Потенциальные и соленоидальные поля

(сборник задач)

2017

11. Потенциальные векторные поля

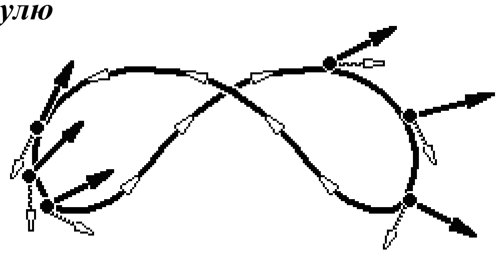
Условия

Проверить, что поле потенциально и найти его потенциал	
№ 11.1. $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} x^3 + 2xy - y^2 \\ x^2 - 2xy - y^3 \end{bmatrix}$ **№ 11.2.** $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} 3x^2 + yz \\ 4y^3 + zx \\ 5z^4 + xy \end{bmatrix}$	**№ 11.1.** $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} \cos x \cos y \\ -\sin x \sin y \end{bmatrix}$ **№ 11.2.** $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} y^2z^3 + 1 \\ 2xyz^3 + 2y \\ 3xy^2z^2 + 3z^2 \end{bmatrix}$
Проверить, что поле потенциально и найти его работу вдоль кривой от точки A до точки B	
№ 11.3. $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} x^4 + 2xy^3 \\ 3x^2y^2 - y^4 \end{bmatrix}$, $A(-1,\ 2) \to B(\ 3, -4)$ **№ 11.4.** $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} x - yz \\ y - zx \\ z - xy \end{bmatrix}$, $A(-1,\ 2, -3) \to B(-4,\ 5, -6)$	**№ 11.3.** $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{ch}\, y \\ \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{sh}\, y \end{bmatrix}$, $A(\ 1, -2) \to B(-3,\ 4)$ **№ 11.4.** $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} x^2 - 2yz \\ y^2 - 2zx \\ z^2 - 2xy \end{bmatrix}$, $A(\ 3,\ 2,\ 1) \to B(\ 4,\ 5,\ 6)$
№ 11.5. Проверить, что электростатическое поле $\vec{E}(\vec{r})$ точечного заряда q, удовлетворяет условиям $\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = 0 \qquad \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$ причем потенциально, но не ~~соленоидально~~	**№ 11.5.** Выяснить, при каких условиях сферическое поле $\vec{E}(\vec{r}) = f(r)\vec{r}$ удовлетворяет условиям $\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = 0 \qquad \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$ причем потенциально, но не ~~соленоидально~~

Теория

*Векторное поле $\vec{F}_P(\vec{r})$ называется **потенциальным** в объеме V, если **циркуляция** поля вдоль любого **замкнутого контура** $L \subset V$ равна **нулю***

$$\oint_L \left(\vec{F}_P(\vec{r}),\ d\vec{L} \right) = 0 \quad \forall L \subset V$$



Теорема *(критерий потенциальности) Для того,*

1) чтобы $\vec{F}_P(\vec{r})$ было потенциальным

$\Leftrightarrow$

1) чтобы $\operatorname{rot} \vec{F}_P(\vec{r}) = \vec{0}$

Замечание. *Объем V должен быть **поверхностно** связным, т.е. любой контур можно стянуть в точку, оставаясь в V (описывая при этом некоторую поверхность $S_L \subset V$)*

Теорема *(характерное свойство потенциального поля) Для того,*

1) чтобы $\vec{F}_P(\vec{r})$ было потенциальным

$\Leftrightarrow$

1) чтобы $\vec{F}_P(\vec{r}) = \operatorname{grad} f(\vec{r})$

*Скалярное поле $f(\vec{r})$ называется **потенциалом** (скалярным) векторного поля $\vec{F}_P(\vec{r})$ и определяется с точностью до const.*

Следствие

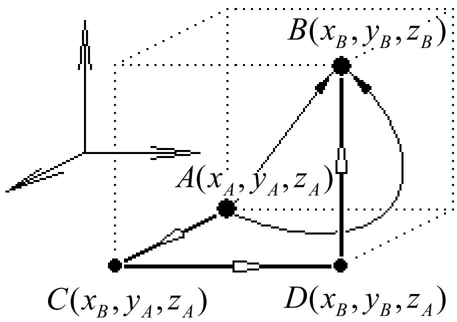
$$\boxed{\operatorname{rot} \operatorname{grad} f(\vec{r}) = \vec{0}}$$

Работа *потенциального поля* ***не зависит*** *от формы L пути, определяясь только граничными точками A и B кривой L_{AB}, и равна разности потенциалов*

$$\int\limits_{L_{AB}} \left(\vec{\boldsymbol{F}}_P(\vec{\boldsymbol{r}}),\ d\vec{\boldsymbol{L}} \right) = \int\limits_{A}^{B} \left(\vec{\boldsymbol{F}}_P(\vec{\boldsymbol{r}}),\ d\vec{\boldsymbol{L}} \right) = f(B) - f(A)$$

Для ее нахождения удобно взять ломаную L_{ACDB} со звеньями

$$L_{AC} \parallel Ox \qquad L_{CD} \parallel Oy \qquad L_{DB} \parallel Oz$$



$$\int\limits_{(x_A, y_A, z_A)}^{(x_B, y_B, z_B)} = \int\limits_{(\boldsymbol{x_A}, y_A, z_A)}^{(\boldsymbol{x_B}, y_B, z_B)} x + \int\limits_{(x_A, \boldsymbol{y_A}, z_A)}^{(x_B, \boldsymbol{y_B}, z_B)} y + \int\limits_{(x_A, y_A, \boldsymbol{z_A})}^{(x_B, y_B, \boldsymbol{z_B})} z =$$

$$= \int\limits_{x_A}^{x_B} P(x, y_A, z_A)\,dx + \int\limits_{y_A}^{y_B} Q(x_B, y, z_A)\,dy + \int\limits_{z_A}^{z_B} R(x_B, y_B, z)\,dz$$

Зафиксировав начальную точку, например $(x_A,\ y_A,\ z_A) = (0,\ 0,\ 0)$, и оставив конечную произвольной $(x_B,\ y_B,\ z_B) = (x,\ y,\ z)$, найдем один из потенциалов

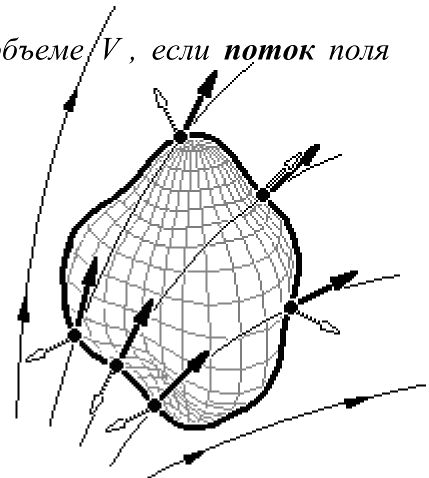
$$f(x,\ y,\ z) = \int\limits_0^x P(x,\ 0,\ 0)\,dx \ + \int\limits_0^y Q(x,\ y,\ 0)\,dy \ + \int\limits_0^z R(x,\ y,\ z)\,dz$$

12. Соленоидальные векторные поля

Условия

№ 12.1. Проверить, что электростатическое поле $\vec{E}(\vec{r}\,)$ бесконечного прямолинейного проводника с постоянной плотностью заряда q удовлетворяет условиям $$\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}\,)=0 \qquad \operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r}\,)=\vec{0}$$ причем и потенциально, и соленоидально	**№ 12.1.** Выяснить, при каких условиях *цилиндрическое* поле $\vec{E}(\vec{d}\,)=f(d)\vec{d}\,, \qquad \vec{d}=\big[\,[\,\vec{e},\vec{r}\,],\vec{e}\,\big]$ удовлетворяет условиям $$\operatorname{div}\vec{E}(\vec{d}\,)=0 \qquad \operatorname{rot}\vec{E}(\vec{d}\,)=\vec{0}$$ причем и потенциально, и соленоидально
№ 12.2. Проверить, что магнитостатическое поле $\vec{H}(\vec{r}\,)$ бесконечного прямолинейного проводника с постоянной плотностью тока $\vec{j}=q\,\vec{v}$ удовлетворяет условиям $$\operatorname{div}\vec{H}(\vec{r}\,)=0 \qquad \operatorname{rot}\vec{H}(\vec{r}\,)=\vec{0}$$ причем соленоидально, но не ~~потенциально~~	**№ 12.2.** Выяснить, при каких условиях *вихревое* поле $\vec{H}(\vec{d}\,)=\big[\,\vec{e},\,f(d)\vec{d}\,\big], \quad \vec{d}=\big[\,[\,\vec{e},\vec{r}\,],\vec{e}\,\big]$ удовлетворяет условиям $$\operatorname{div}\vec{H}(\vec{d}\,)=0 \qquad \operatorname{rot}\vec{H}(\vec{d}\,)=\vec{0}$$ причем соленоидально, но не ~~потенциально~~

Теория



1° *Векторное поле* $\vec{F}_S(\vec{r}\,)$ *называется* ***соленоидальным*** *в объеме* V, *если* ***поток*** *поля через любую* ***замкнутую поверхность*** $S\subset V$ *равен* ***нулю***

$$\oiint\limits_S \left(\vec{F}_S(\vec{r}\,),\,d\vec{S}\,\right)=0 \quad \forall S\subset V$$

Теорема *(критерий соленоидальности) Для того,*

1) *чтобы поле* $\vec{F}_S(\vec{r}\,)$ *было соленоидальным*

$\Leftrightarrow$

1) *чтобы* $\operatorname{div}\vec{F}_S(\vec{r}\,)=0$

Замечание. *Объем* V *должен быть* ***объемно*** *связным, т.е. любую замкнутую поверхность можно стянуть в точку, оставаясь в* V.

Теорема *(характерное свойство соленоидального поля) Для того,*

1) *чтобы поле* $\vec{F}_S(\vec{r}\,)$ *было соленоидальным*

$\Leftrightarrow$

1) *чтобы поле* $\vec{F}_S(\vec{r}\,)=\operatorname{rot}\vec{G}(\vec{r}\,)$

Векторное поле $\vec{G}(\vec{r}\,)$ *называется* ***векторным потенциалом*** *векторного поля* $\vec{F}_S(\vec{r}\,)$ *и определяется с точностью до градиента* $\operatorname{grad} f(\vec{r}\,)$ *некоторого скалярного поля (т.е. с точностью до потенциального поля).*

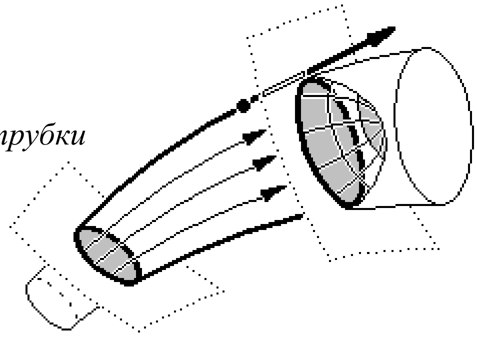
Следствие

$$\boxed{\operatorname{div}\operatorname{rot}\,\vec{F}(\vec{r}\,)=0}$$

Поток *соленоидального поля* ***не зависит*** *от формы* S *поверхности, определяясь только границей* L *поверхности* S_L, *и равен циркуляции векторного потенциала по* L

$$\iint_{S_L} \left(\vec{\boldsymbol{F}}_S(\vec{\boldsymbol{r}}),\ d\vec{\boldsymbol{S}} \right) = \oint_L \left(\vec{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\ d\vec{\boldsymbol{L}} \right)$$

Более того, поток через любое сечение векторной трубки



$$\iint_S \left(\vec{\boldsymbol{F}}_S(\vec{\boldsymbol{r}}),\ d\vec{\boldsymbol{S}} \right) = const$$

Отсюда вытекает, что векторные трубки (иногда говорят о векторных линиях) не могут ни начинаться, ни кончаться внутри поля, т.е. они либо замкнуты, либо имеют концы на границе поля, либо имеют бесконечные ветви.

2° ***Потенциальное*** *и* ***соленоидальное*** *векторное поле* $\vec{\boldsymbol{F}}_L(\vec{\boldsymbol{r}})$ *называется* ***лапласовым***

Из цепочки эквивалентных условий (если объем V *-* ***объемно*** *и* ***поверхностно*** *связный)*

$$\begin{bmatrix} \oint_L \left(\vec{\boldsymbol{F}}_L(\vec{\boldsymbol{r}}),\ d\vec{\boldsymbol{L}} \right) = 0 \\ \oiint_S \left(\vec{\boldsymbol{F}}_L(\vec{\boldsymbol{r}}),\ d\vec{\boldsymbol{S}} \right) = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{F}}_L(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{0}} \\ \operatorname{div} \vec{\boldsymbol{F}}_L(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{F}}_L(\vec{\boldsymbol{r}}) = \operatorname{grad} f(\vec{\boldsymbol{r}}) \\ \vec{\boldsymbol{F}}_L(\vec{\boldsymbol{r}}) = \operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \end{bmatrix}$$

вытекает, что лапласово поле является градиентом ***гармонической*** *функции*

$$\vec{\boldsymbol{F}}_L(\vec{\boldsymbol{r}}) = \operatorname{grad} f(\vec{\boldsymbol{r}}), \qquad \text{где} \qquad \operatorname{div} \operatorname{grad} f(\vec{\boldsymbol{r}}) = \Delta f(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0$$

Теорема

Любое векторное поле $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ *допускает разложение в сумму* ***потенциального*** *и* ***соленоидального*** *полей*

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{F}}_P(\vec{\boldsymbol{r}}) + \vec{\boldsymbol{F}}_S(\vec{\boldsymbol{r}}) = \left(\vec{\boldsymbol{F}}_P(\vec{\boldsymbol{r}}) + \vec{\boldsymbol{F}}_L(\vec{\boldsymbol{r}}) \right) + \left(\vec{\boldsymbol{F}}_S(\vec{\boldsymbol{r}}) - \vec{\boldsymbol{F}}_L(\vec{\boldsymbol{r}}) \right)$$

Это разложение единственно с точностью до ***лапласова*** *поля*

3° *Во многих вопросах электродинамики и гидродинамики часто встречаются задачи о восстановлении векторного поля* $\vec{F}$ *по наперед заданным* ***дивергенции*** *и* ***ротору***

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{F} = q \\ \\ \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{j} \end{array}\right.$$

В отличие от скалярного поля q *векторное поле* $\vec{j}$ *не может быть совсем произвольным*

$$\operatorname{div} \vec{j} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$$

Из цепочки эквивалентных условий

$$\left[\begin{array}{llll} \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{j} = \operatorname{rot} \vec{G} & & & \\ \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{j} & \Leftrightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{j} = \operatorname{rot} \vec{G} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \vec{G} + \operatorname{grad} f & & \\ \operatorname{div} \vec{F} = q & & & \Leftrightarrow \quad \operatorname{div} (\vec{G} + \operatorname{grad} f) = q \end{array}\right.$$

вытекает, что поставленная задача сводится к решению уравнения Пуассона

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = q - \operatorname{div} \vec{G} = p \quad \Leftrightarrow \quad \Delta f = p$$

Замечание. *В случае ограниченной области* V *дополнительное задание на границе* S_V *нормальной составляющей восстанавливаемого поля обеспечивает его единственность*

$$\left[\begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{F} = q & \\ \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{j} & \left(\operatorname{div} \vec{j} = 0 \right) \\ \left(\vec{F}, \vec{n} \right) \Big|_{\vec{r} \in S_V} = g & \left(\oint\!\!\!\oint_{S_V} g \, dS = \iiint_V q \, dV \right) \end{array}\right.$$

Действительно, если $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ *два решения, то разность* $\vec{F}_L = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$ *представляет собой лапласово поле, “скользящее” вдоль границы*

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{F}_L = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{F}_L = \vec{0} \\ \left(\vec{F}_L, \vec{n} \right) \Big|_{\vec{r} \in S_V} = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_L(\vec{r}) = \operatorname{grad} f(\vec{r}), \qquad \text{где} \qquad \left[\begin{array}{l} \Delta f(\vec{r}) = 0 \\ \\ f'_{\vec{n}}(\vec{r}) \Big|_{\vec{r} \in S_V} = 0 \end{array}\right.$$

Поскольку решением однородной задачи
Неймана являются только $f(\vec{r}) \equiv const$, *то*

$$\vec{\boldsymbol{F}}_L(\vec{\boldsymbol{r}}\,) = \operatorname{grad} f(\vec{\boldsymbol{r}}\,) = \nabla const = \vec{\boldsymbol{0}}, \qquad \forall \vec{\boldsymbol{r}} \in V$$

Замечание. *Забегая вперед, приведем два важных физических примера.*

Электростатическое *поле* $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$, *создаваемое распределенным в объеме* V *зарядом с плотностью* $q(\vec{\boldsymbol{r}})$, ***потенциально*** *и равно*

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\iiint\limits_V q(\vec{\boldsymbol{\rho}})\,\frac{\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{\rho}}}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{\rho}}|^3}\,dV_\rho=-\operatorname{grad}\iiint\limits_V \frac{q(\vec{\boldsymbol{\rho}})}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{\rho}}|}\,dV_\rho \qquad \Rightarrow \qquad \left[\begin{array}{l}\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})=4\pi q(\vec{\boldsymbol{r}})\\ \operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\vec{\boldsymbol{0}}\end{array}\right.$$

Магнитостатическое *поле* $\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}})$, *создаваемое циркулирующим в объеме* V *стационарным током с плотностью* $\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})$: $(\nabla,\vec{\boldsymbol{j}})\Big|_V=(\vec{\boldsymbol{n}},\vec{\boldsymbol{j}})\Big|_{S_V}=0$, ***соленоидально*** *и равно*

$$\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\iiint\limits_V \left[\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}}),\,\frac{\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{\rho}}}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{\rho}}|^3}\right]dV_\rho=\operatorname{rot}\iiint\limits_V \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}})}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{\rho}}|}\,dV_\rho \qquad \Rightarrow \qquad \left[\begin{array}{l}\operatorname{div}\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}})=0\\ \operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}})=4\pi\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})\end{array}\right.$$

Следовательно, одним из решений задачи о восстановлении векторного поля по заданным div **и** rot **(с точностью до лапласового поля) в этом случае является**

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\underbrace{-\frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}\iiint\limits_V \frac{q(\vec{\boldsymbol{\rho}})}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{\rho}}|}\,dV_\rho}_{\vec{\boldsymbol{F}}_P}+\underbrace{\frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\iiint\limits_V \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}})}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{\rho}}|}\,dV_\rho}_{\vec{\boldsymbol{F}}_S}$$

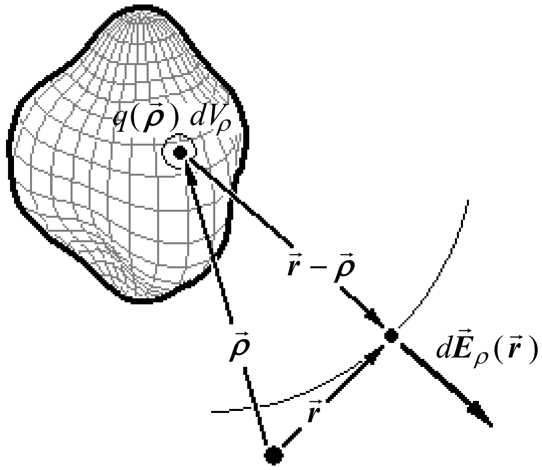
13. Электростатическое поле

Условия

№ 13.1. Найти электростатическое поле $\vec{E}(\vec{r})$ равномерно заряженного шара с *объемной* плотностью q	
вне шара	внутри шара
№ 13.2. Найти электростатическое поле $\vec{E}(\vec{r})$ равномерно заряженной сферы с *поверхностной* плотностью q	
вне сферы	внутри сферы
№ 13.3. Найти электростатическое поле $\vec{E}(\vec{r})$ равномерно заряженных бесконечных пластин конденсатора с *поверхностной* плотностью $\pm q$	
вне конденсатора	внутри конденсатора

Теория

*Согласно закону **Кулона** элементарный заряд $q(\vec{\rho})\,dV_\rho$, находящийся в точке $\vec{\rho}$ со "сферическим объемом" dV_ρ и плотностью $q(\vec{\rho})$, создает в точке $\vec{r}$ элементарное электростатическое поле с напряженностью*



$$d\vec{E}_\rho(\vec{r}) = q(\vec{\rho})\,\frac{\vec{r}-\vec{\rho}}{|\vec{r}-\vec{\rho}|^3}\,dV_\rho$$

так что суммарное поле в точке $\vec{r}$ равно

$$\vec{E}(\vec{r}) = \iiint\limits_V q(\vec{\rho})\,\frac{\vec{r}-\vec{\rho}}{|\vec{r}-\vec{\rho}|^3}\,dV_\rho$$

*Найдем **дивергенцию** электростатического поля*

$$\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}_0) = \lim_{V_\varepsilon\to\vec{r}_0}\frac{\oint\!\!\oint\limits_{S_\varepsilon}\big(\vec{n}(\vec{r}),\,\vec{E}(\vec{r})\big)dS_r}{|V_\varepsilon|}$$

Имеем

$$\oint\!\!\oint\limits_{S_\varepsilon}\big(\vec{n}(\vec{r}),\,\vec{E}(\vec{r})\big)\,dS_r =$$

$$= \oint\!\!\oint\limits_{S_\varepsilon}\Big(\vec{n}(\vec{r}),\,\iiint\limits_V q(\vec{\rho})\,\frac{\vec{r}-\vec{\rho}}{|\vec{r}-\vec{\rho}|^3}\,dV_\rho\Big)\,dS_r = \iiint\limits_{(V\setminus V_\varepsilon)\cup V_\varepsilon} q(\vec{\rho})\underbrace{\oint\!\!\oint\limits_{S_\varepsilon}\frac{\big(\vec{n}(\vec{r}),\,\vec{r}-\vec{\rho}\big)}{|\vec{r}-\vec{\rho}|^3}\,dS_r}_{\begin{cases}0, & \vec{\rho}\notin V_\varepsilon\\ 4\pi, & \vec{\rho}\in V_\varepsilon\end{cases}}\,dV_\rho =$$

$$= \iiint\limits_{V\setminus V_\varepsilon} q(\vec{\rho})\cdot 0\;dV_\rho + \iiint\limits_{V_\varepsilon} q(\vec{\rho})\cdot 4\pi\;dV_\rho = 4\pi q(\vec{\xi})\,|V_\varepsilon| \qquad \big(\vec{\xi}\in V_\varepsilon\big)$$

"Расширяя" объем V с $q(\vec{\rho})\equiv 0$, всегда можно считать точку $\vec{r}_0$ находящейся внутри V. Следовательно,

$$\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}_0) = \lim_{V_\varepsilon\to\vec{r}_0}\frac{4\pi q(\vec{\xi})\,|V_\varepsilon|}{|V_\varepsilon|} = 4\pi q(\vec{r}_0)$$

Найдем ***ротор*** *электростатического поля*

$$\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}_0) = \lim_{V_\varepsilon \to \vec{\boldsymbol{r}}_0} \frac{\displaystyle\oiint_{S_\varepsilon} \left[\,\vec{\boldsymbol{n}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\ \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\right] dS_r}{\left|V_\varepsilon\right|}$$

Имеем

$$\oiint_{S_\varepsilon} \left[\,\vec{\boldsymbol{n}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\ \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\right] dS_r =$$

$$= \oiint_{S_\varepsilon} \left[\,\vec{\boldsymbol{n}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\ \iiint_V q(\vec{\boldsymbol{\rho}})\,\frac{\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{\rho}}}{\left|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{\rho}}\right|^3}\,dV_\rho\,\right] dS_r = \iiint_V q(\vec{\boldsymbol{\rho}}) \underbrace{\oiint_{S_\varepsilon} \frac{\left[\,\vec{\boldsymbol{n}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\ \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{\rho}}\,\right]}{\left|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{\rho}}\right|^3}\,dS_r}_{=\,\vec{\boldsymbol{0}},\ \forall \vec{\boldsymbol{\rho}}}\,dV_\rho$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}_0) = 0$$

Полученные значения **div** *и* **rot** *напряженности* $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ *называются дифференциальными уравнениями электростатического поля, равносильные интегральным*

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{div}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 4\pi q(\vec{\boldsymbol{r}}) \\[2ex] \operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{0}} \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \displaystyle\oiint_S \left(\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\ d\vec{\boldsymbol{S}}\right) \quad \left(= \iiint_{V_S} \operatorname{div}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,dV \right) = 4\pi \iiint_{V_S} q(\vec{\boldsymbol{r}})\,dV \\[3ex] \displaystyle\oint_L \left(\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\ d\vec{\boldsymbol{L}}\right) \quad \left(= \iint_{S_L} \left(\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\ d\vec{\boldsymbol{S}}\right) \right) = 0 \end{array}\right.$$

представляющим собой известные из опыта ***законы электростатического поля***

1) ***(Закон Гаусса) Поток электростатического поля через замкнутую поверхность равен полному заряду, находящемуся внутри поверхности, умноженному на*** 4π
2) ***(Независимость работы от формы пути)***
   Циркуляция электростатического поля вдоль замкнутого контура равна нулю

Из условия $\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{0}}$ *вытекает* ***потенциальность*** *электростатического поля. Найдем его* ***скалярный потенциал*** $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\operatorname{grad}\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \iiint_V q(\vec{\boldsymbol{\rho}})\,\frac{\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{\rho}}}{\left|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{\rho}}\right|^3}\,dV_\rho = -\iiint_V \nabla_r \frac{q(\vec{\boldsymbol{\rho}})}{\left|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{\rho}}\right|}\,dV_\rho = -\nabla_r \iiint_V \frac{q(\vec{\boldsymbol{\rho}})}{\left|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{\rho}}\right|}\,dV_\rho$$

$\Rightarrow$

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\operatorname{grad}\iiint_V \frac{q(\vec{\boldsymbol{\rho}})}{\left|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{\rho}}\right|}\,dV_\rho \quad\Rightarrow\quad \varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \iiint_V \frac{q(\vec{\boldsymbol{\rho}})}{\left|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{\rho}}\right|}\,dV_\rho$$

14. Магнитостатическое поле

Условия

№ 14.1. Найти магнитостатическое поле $\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ бесконечного проводника с постоянным *объемным* током плотностью $\vec{\boldsymbol{j}} = j \cdot \vec{\boldsymbol{e}}$	
вне проводника	внутри проводника
№ 14.2. Найти магнитостатическое поле $\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ бесконечного проводника с постоянным *поверхностным* током плотностью $\vec{\boldsymbol{j}} = j \cdot \vec{\boldsymbol{e}}$	
вне проводника	внутри проводника
№ 14.3. Найти магнитостатическое поле $\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ бесконечной цилиндрической катушки с *объемным вихревым* током плотностью $\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}}) = j\left[\, \vec{\boldsymbol{e}},\ \frac{\vec{\boldsymbol{d}}(\vec{\boldsymbol{\rho}})}{d}\,\right]$	
вне катушки	внутри катушки
№ 14.4. Найти магнитостатическое поле $\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ бесконечной цилиндрической катушки с *поверхностным вихревым* током плотностью $\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}}) = j\left[\, \vec{\boldsymbol{e}},\ \frac{\vec{\boldsymbol{d}}(\vec{\boldsymbol{\rho}})}{d}\,\right]$	
вне катушки	внутри катушки

Теория

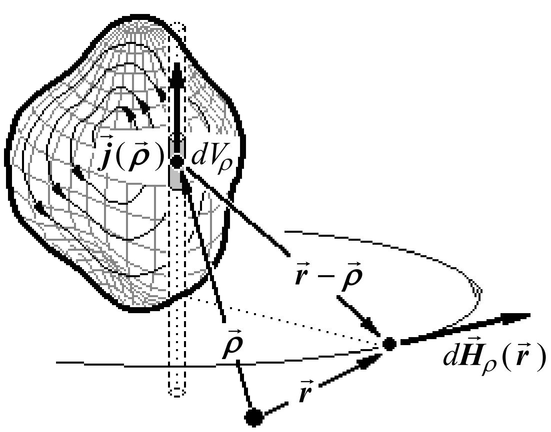
*Согласно закону **Био-Савара-Лапласа** элементарный ток* $\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}})\, dV_\rho$*, находящийся в точке* $\vec{\boldsymbol{\rho}}$ *с “цилиндрическим объемом”* dV_ρ *векторной трубки и плотностью тока* $\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}}) = q(\vec{\boldsymbol{\rho}})\, \vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{\rho}})$ *(*$q(\vec{\boldsymbol{\rho}})$*- плотность движущихся со скоростью* $\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{\rho}})$ *зарядов) создает в точке* $\vec{\boldsymbol{r}}$ *элементарное магнитное поле с напряженностью*

$$d\vec{\boldsymbol{H}}_\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = \left[\, \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}}),\ \frac{\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{\rho}}}{|\,\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{\rho}}\,|^3}\,\right] dV_\rho$$

так что суммарное поле, создаваемое непрерывно циркулирующим в объеме V *стационарным током с плотностью* $\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}})$

$$\left(\nabla,\ \vec{\boldsymbol{j}}\,\right)\Big|_V = \left(\vec{\boldsymbol{n}},\ \vec{\boldsymbol{j}}\,\right)\Big|_{S_V} = 0$$

в точке $\vec{\boldsymbol{r}}$ *равно*



$$\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \iiint_V \left[\, \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{\rho}}),\ \frac{\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{\rho}}}{|\,\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{\rho}}\,|^3}\,\right] dV_\rho$$

*Найдем **дивергенцию** магнитостатического поля*

$$\operatorname{div} \vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}}_0) = \lim_{V_\varepsilon \to \vec{\boldsymbol{r}}_0} \frac{\oiint_{S_\varepsilon} \left(\vec{\boldsymbol{n}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\ \vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}})\right) dS_r}{|\,V_\varepsilon\,|}$$

Имеем
$$\oiint_{S_\varepsilon} \left(\vec{n}(\vec{r}\,),\, \vec{H}(\vec{r}\,) \right) dS_r =$$

$$= \oiint_{S_\varepsilon} \left(\vec{n}(\vec{r}\,),\ \iiint_V \frac{\left[\vec{j}(\vec{\rho}),\, \vec{r}-\vec{\rho}\, \right]}{|\,\vec{r}-\vec{\rho}\,|^3}\, dV_\rho \right) dS_r = \oiint_{S_\varepsilon} \iiint_V \frac{\left(\vec{n}(\vec{r}\,),\, \left[\vec{j}(\vec{\rho}),\, \vec{r}-\vec{\rho}\, \right] \right)}{|\,\vec{r}-\vec{\rho}\,|^3}\, dV_\rho\; dS_r =$$

$$= -\iiint_V \oiint_{S_\varepsilon} \frac{\left(\vec{j}(\vec{\rho}),\, \left[\vec{n}(\vec{r}\,),\, \vec{r}-\vec{\rho}\, \right] \right)}{|\,\vec{r}-\vec{\rho}\,|^3} dS_r\; dV_\rho = -\iiint_V \left(\vec{j}(\vec{\rho}),\, \underbrace{\oiint_{S_\varepsilon} \frac{\left[\vec{n}(\vec{r}\,),\, \vec{r}-\vec{\rho}\, \right]}{|\,\vec{r}-\vec{\rho}\,|^3} dS_r}_{\vec{0},\quad \forall \vec{\rho}} \right) dV_\rho = 0$$

Следовательно,
$$\operatorname{div} \vec{H}(\vec{r}_0) = 0$$

Найдем ***ротор*** *магнитостатического поля*

$$\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}_0) = \lim_{V_\varepsilon \to \vec{r}_0} \frac{\oiint_{S_\varepsilon} \left[\vec{n}(\vec{r}\,),\, \vec{H}(\vec{r}\,) \right] dS_r}{|\,V_\varepsilon\,|}$$

Имеем
$$\oiint_{S_\varepsilon} \left[\vec{n}(\vec{r}\,),\, \vec{H}(\vec{r}\,) \right] dS_r =$$

$$= \oiint_{S_\varepsilon} \left[\vec{n}(\vec{r}\,),\ \iiint_V \frac{\left[\vec{j}(\vec{\rho}),\, \vec{r}-\vec{\rho}\, \right]}{|\,\vec{r}-\vec{\rho}\,|^3}\, dV_\rho \right] dS_r = \oiint_{S_\varepsilon} \iiint_V \frac{\left[\vec{n}(\vec{r}\,),\, \left[\vec{j}(\vec{\rho}),\, \vec{r}-\vec{\rho}\, \right] \right]}{|\,\vec{r}-\vec{\rho}\,|^3}\, dV_\rho\; dS_r = \to$$

Раскрывая двойные векторные произведения и получив связь между ними

$$\left[\vec{n},\, \left[\vec{j},\, \vec{r}-\vec{\rho}\, \right] \right] = \vec{j}\left(\vec{n},\, \vec{r}-\vec{\rho}\, \right) - (\vec{r}-\vec{\rho})\left(\vec{n},\, \vec{j}\, \right)$$

$$\left[\vec{j},\, \left[\vec{n},\, \vec{r}-\vec{\rho}\, \right] \right] = \vec{n}\left(\vec{j},\, \vec{r}-\vec{\rho}\, \right) - (\vec{r}-\vec{\rho})\left(\vec{j},\, \vec{n}\, \right)$$

$\Rightarrow$

$$\left[\vec{n},\, \left[\vec{j},\, \vec{r}-\vec{\rho}\, \right] \right] = \vec{j}\left(\vec{n},\, \vec{r}-\vec{\rho}\, \right) + \left[\vec{j},\, \left[\vec{n},\, \vec{r}-\vec{\rho}\, \right] \right] - \vec{n}\left(\vec{j},\, \vec{r}-\vec{\rho}\, \right)$$

перейдем к рассмотрению трех соответствующих интегралов

$$a) \to = \oiint_{S_\varepsilon} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{\rho})\left(\vec{n}(\vec{r}\,),\, \vec{r}-\vec{\rho}\, \right)}{|\,\vec{r}-\vec{\rho}\,|^3}\, dV_\rho\; dS_r = \iiint_{(V \setminus V_\varepsilon) \cup V_\varepsilon} \vec{j}(\vec{\rho}) \underbrace{\oiint_{S_\varepsilon} \frac{\left(\vec{n}(\vec{r}\,),\, \vec{r}-\vec{\rho}\, \right)}{|\,\vec{r}-\vec{\rho}\,|^3} dS_r}_{\begin{cases} 0, & \vec{\rho} \notin V_\varepsilon \\ 4\pi, & \vec{\rho} \in V_\varepsilon \end{cases}} dV_\rho =$$

$$= \iiint_{V \setminus V_\varepsilon} \vec{j}(\vec{\rho}) \cdot 0\ \, dV_\rho + \iiint_{V_\varepsilon} \vec{j}(\vec{\rho}) \cdot 4\pi\ \, dV_\rho = 4\pi \vec{j}(\,\vec{\xi}\,)\,|\,V_\varepsilon\,| \qquad \left(\vec{\xi} \in V_\varepsilon \right)$$

"Расширяя" объем V с $\vec{j}(\vec{\rho}) \equiv 0$, *всегда можно считать точку* $\vec{r}_0$ *находящейся внутри V*

$$b)\to=\oiint\limits_{S_\varepsilon}\iiint\limits_V \frac{\left[\,\vec{\boldsymbol j}(\vec{\boldsymbol\rho}),\ \left[\,\vec{\boldsymbol n}(\vec{\boldsymbol r}),\ \vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol\rho}\,\right]\right]}{|\,\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol\rho}\,|^3}\,dV_\rho\,dS_r=\iiint\limits_V\left[\,\vec{\boldsymbol j}(\vec{\boldsymbol\rho}),\ \underbrace{\oiint\limits_{S_\varepsilon}\frac{\left[\,\vec{\boldsymbol n}(\vec{\boldsymbol r}),\ \vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol\rho}\,\right]}{|\,\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol\rho}\,|^3}dS_r}_{=\,\vec{\boldsymbol 0},\ \ \forall\vec{\boldsymbol\rho}}\,\right]dV_\rho=\vec{\boldsymbol 0}$$

$$c)\to=\oiint\limits_{S_\varepsilon}\iiint\limits_V \frac{\vec{\boldsymbol n}(\vec{\boldsymbol r})\left(\,\vec{\boldsymbol j}(\vec{\boldsymbol\rho}),\ \vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol\rho}\,\right)}{|\,\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol\rho}\,|^3}\,dV_\rho\,dS_r=\oiint\limits_{S_\varepsilon}\vec{\boldsymbol n}(\vec{\boldsymbol r})\iiint\limits_V\left(\,\vec{\boldsymbol j}(\vec{\boldsymbol\rho}),\ \nabla_\rho\frac{1}{|\,\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol\rho}\,|}\right)dV_\rho\,dS_r=\vec{\boldsymbol 0}$$

Последнее вытекает из интегральной формулы, связывающей плотность тока $\vec{\boldsymbol j}$, *циркулирующего в объеме* V, *с некоторым произвольным скалярным полем* f

$$0=\oiint\limits_{S_V}\underbrace{\left(\,\vec{\boldsymbol n},\ \vec{\boldsymbol j}\cdot f\,\right)}_{=\,0}dS=\iiint\limits_V\left(\,\nabla,\ \overset{\downarrow}{\overbrace{\vec{\boldsymbol j}\cdot f}}\,\right)dV=\iiint\limits_V\left(\underbrace{\left(\,\nabla,\ \overset{\downarrow}{\vec{\boldsymbol j}}\,\right)}_{=\,0}\cdot f+\left(\,\nabla\overset{\downarrow}{f},\ \vec{\boldsymbol j}\,\right)\right)dV=\iiint\limits_V\left(\,\vec{\boldsymbol j},\ \nabla f\,\right)dV$$

Кстати, полагая $f=\left(\,\vec{\boldsymbol c},\ \vec{\boldsymbol r}\,\right)\ \Rightarrow\ \nabla f=\vec{\boldsymbol c}$ *получаем, что полный ток* $\iiint\limits_V\vec{\boldsymbol j}\ dV=\vec{\boldsymbol 0}$

Следовательно,

$$\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol H}(\vec{\boldsymbol r}_0)=\lim_{V_\varepsilon\to\vec{\boldsymbol r}_0}\frac{4\pi\vec{\boldsymbol j}(\,\vec{\boldsymbol\xi}\,)\,|V_\varepsilon|}{|V_\varepsilon|}=4\pi\vec{\boldsymbol j}(\vec{\boldsymbol r}_0)$$

Полученные значения **div** *и* **rot** *напряженности* $\vec{\boldsymbol H}(\vec{\boldsymbol r})$ *называются дифференциальными уравнениями магнитостатического поля, равносильные интегральным*

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{div}\vec{\boldsymbol H}(\vec{\boldsymbol r})=0\\[2ex]\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol H}(\vec{\boldsymbol r})=4\pi\vec{\boldsymbol j}(\vec{\boldsymbol r})\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{l}\oiint\limits_S\left(\,\vec{\boldsymbol H}(\vec{\boldsymbol r}),\ d\vec{\boldsymbol S}\,\right)\quad\left(=\iiint\limits_{V_S}\operatorname{div}\vec{\boldsymbol H}(\vec{\boldsymbol r})\,dV\right)=0\\[2ex]\oint\limits_L\left(\,\vec{\boldsymbol H}(\vec{\boldsymbol r}),\ d\vec{\boldsymbol L}\,\right)\quad\left(=\iint\limits_{S_L}\left(\,\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol H}(\vec{\boldsymbol r}),\ d\vec{\boldsymbol S}\,\right)\right)=4\pi\iint\limits_{S_L}\left(\,\vec{\boldsymbol j}(\vec{\boldsymbol r}),\ d\vec{\boldsymbol S}\,\right)\end{array}\right.$$

представляющим собой известные из опыта ***законы магнитостатического поля***

1) ***(Отсутствие магнитных зарядов)***
   Поток постоянного магнитного поля через замкнутую поверхность равен нулю
2) ***(Закон Ампера) Циркуляция магнитного поля вдоль замкнутого контура равна полному току, пронизывающему поверхность, опирающуюся на контур, умноженному на*** 4π

Из условия $\operatorname{div}\vec{\boldsymbol H}(\vec{\boldsymbol r})=0$ *вытекает* ***соленоидальность*** *магнитостатического поля. Найдем его* ***векторный потенциал*** $\vec{\boldsymbol H}(\vec{\boldsymbol r})=\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol A}(\vec{\boldsymbol r})$

$$\vec{\boldsymbol H}(\vec{\boldsymbol r})=\iiint\limits_V\frac{\left[\,\vec{\boldsymbol j}(\vec{\boldsymbol\rho}),\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol\rho}\,\right]}{|\,\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol\rho}\,|^3}\,dV_\rho=\iiint\limits_V\left[\ \nabla_r\,,\ \frac{\vec{\boldsymbol j}(\vec{\boldsymbol\rho})}{|\,\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol\rho}\,|}\right]dV_\rho=\left[\ \nabla_r\,,\ \iiint\limits_V\frac{\vec{\boldsymbol j}(\vec{\boldsymbol\rho})}{|\,\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol\rho}\,|}\,dV_\rho\,\right]$$

$\Rightarrow$

$$\vec{\boldsymbol H}(\vec{\boldsymbol r})=\operatorname{rot}\iiint\limits_V\frac{\vec{\boldsymbol j}(\vec{\boldsymbol\rho})}{|\,\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol\rho}\,|}\,dV_\rho\quad\Rightarrow\quad\vec{\boldsymbol A}(\vec{\boldsymbol r})=\iiint\limits_V\frac{\vec{\boldsymbol j}(\vec{\boldsymbol\rho})}{|\,\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol\rho}\,|}\,dV_\rho$$